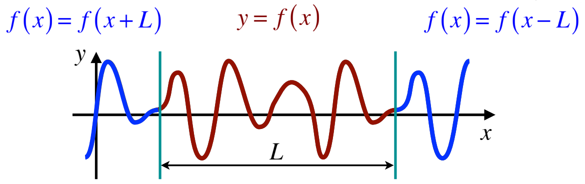
離散フーリエ変換

フーリエ展開とフーリエ変換

フーリエ展開



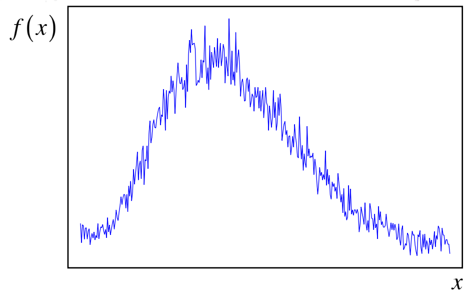
- 周期関数は(を)三角関数で展開できる(する)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos k_1x+a_2\cos k_2x+a_3\cos k_3x+\cdots$$
$$+b_1\sin k_1x+b_2\sin k_2x+b_3\sin k_3x+\cdots$$

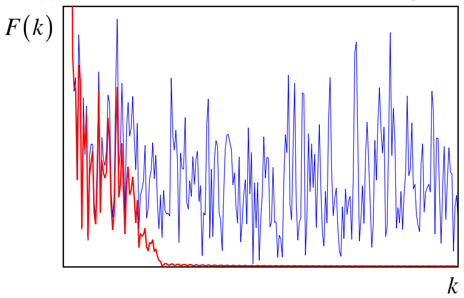
フーリエ変換の応用

- 音声信号・電気信号の加工
  - 雑音の除去
- 画像処理
  - ピンボケの補正
  - 画像圧縮
- 最も汎用的な直交関数展開
  - 微分方程式の数値解法（行列化）

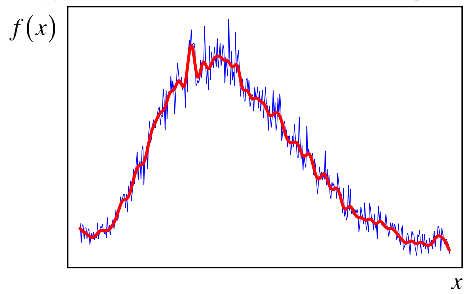
フーリエ変換の応用例



フーリエ変換の応用例



フーリエ変換の応用例



複素フーリエ展開

- 周期関数は(を)三角関数で展開できる(する)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos k_1x+a_2\cos k_2x+a_3\cos k_3x+\cdots$$
$$+b_1\sin k_1x+b_2\sin k_2x+b_3\sin k_3x+\cdots$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{ikx}=\cos kx+i\sin kx} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\cos kx&=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{ikx}+\mathrm{e}^{-ikx}\right)\\ \sin kx&=\frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{ikx}-\mathrm{e}^{-ikx}\right)\end{aligned}}$$

$$f(x)=c_0+c_1\,\mathrm{e}^{ik_1x}+c_1'\,\mathrm{e}^{-ik_1x}+c_2\,\mathrm{e}^{ik_2x}+c_2'\,\mathrm{e}^{-ik_2x}+c_3\,\mathrm{e}^{ik_3x}+c_3'\,\mathrm{e}^{-ik_3x}+\cdots$$
$$=\sum_n c_n\,\mathrm{e}^{ik_nx}$$

波数・振動数

$$f(x)=\sum_n c_n\,\mathrm{e}^{ik_nx} \qquad f(x+L)=\sum_n c_n\,\mathrm{e}^{ik_n(x+L)}$$

$$f(x+L)=f(x)$$

$$\sum_n c_n\,\mathrm{e}^{ik_n(x+L)}=\sum_n c_n\,\mathrm{e}^{ik_nx}$$
$$\sum_n c_n\,\mathrm{e}^{ik_nx}\left(\mathrm{e}^{ik_nL}-1\right)=0 \Rightarrow \boxed{k_n=\frac{2\pi n}{L}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)}$$
$$\Rightarrow k_nL=2\pi n$$

フーリエ係数の性質

$$f(x)=\sum_n c_n\,\mathrm{e}^{ik_nx}$$

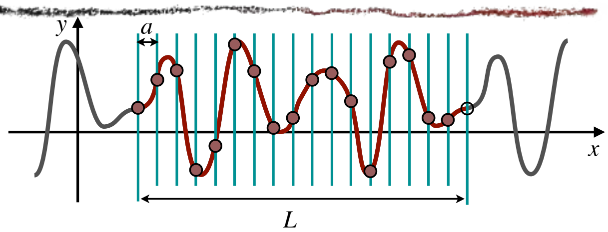
展開する関数が実関数のとき

$$f(x)^*=\sum_n c_n^*\,\mathrm{e}^{-ik_nx}=\sum_n c_n^*\,\mathrm{e}^{ik_{-n}x}=\sum_{n'} c_{-n'}^*\,\mathrm{e}^{ik_{n'}x}$$
$$\left(k_n=\frac{2\pi n}{L}\quad\Rightarrow -k_n=k_{-n}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{c_n^*=c_{-n}}$$

nの関数として、フーリエ係数の実数部は偶関数

虚数部は奇関数

関数の離散化(サンプリング)



$$x_n=na=\frac{L}{N}n\quad(n=0,1,2,3,\cdots,N-1)$$

$$f(x)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}c_p\,\mathrm{e}^{ik_px} \quad\Rightarrow\quad f(x_n)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}c_p\,\mathrm{e}^{ik_px_n}\equiv f_n$$

離散化されたフーリエ展開

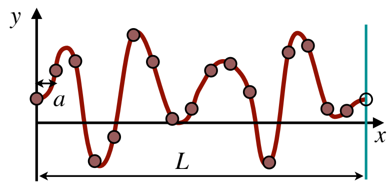
$$f_n=\sum_{p=-\infty}^{\infty}c_p\,\mathrm{e}^{ik_px_n} \qquad k_p=\frac{2\pi p}{L} \qquad x_n=\frac{L}{N}n\quad(n=0,1,2,3,\cdots,N-1)$$
$$k_px_n=\frac{2\pi p}{L}\frac{L}{N}n=\frac{2\pi np}{N}\quad(n=0,1,2,3,\cdots,N-1)$$

$$f_n=\sum_{p=-\infty}^{\infty}c_p\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi np}{N}}=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{q=-\infty}^{\infty}c_{qN+m}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi n(qN+m)}{N}}$$
$$p=qN+m\quad(m=0,1,2,3,\cdots,N-1)$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{q=-\infty}^{\infty}c_{qN+m}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi nm}{N}}=\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi nm}{N}}\sum_{q=-\infty}^{\infty}c_{qN+m}=\sum_{m=0}^{N-1}g_m\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi nm}{N}}$$
$$\left(g_m=\sum_{q=-\infty}^{\infty}c_{qN+m}\right)$$

離散化されたフーリエ展開

$$x_n=na=\frac{L}{N}n\quad(n=0,1,2,3,\cdots,N-1)$$
$$f_n=f(x_n)$$
$$k_m=\frac{2\pi}{L}m\quad(m=0,1,2,3,\cdots,N-1) \qquad\Rightarrow\quad f_n=\sum_{m=0}^{N-1}g_m\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi mn}{N}}$$



逆フーリエ変換

$$f_n=\sum_{m=0}^{N-1} g_m\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi mn}{N}}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} f_n\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi np}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} g_m\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi mn}{N}}\right)\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi np}{N}}=\sum_{m=0}^{N-1} g_m\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi(m-p)n}{N}}$$

「1」のフーリエ変換

$$m\neq p\Rightarrow\quad \sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi(m-p)n}{N}}=\frac{1-\mathrm{e}^{i\frac{2\pi(m-p)}{N}N}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2\pi(m-p)}{N}}}=0$$

$$m=p\Rightarrow\quad \sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi(m-p)n}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}1=N$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi(m-p)n}{N}}=N\delta_{m,p}$$

$\delta_{m,p}$ クロネッカのデルタ

逆フーリエ変換

$$f_n=\sum_{m=0}^{N-1} g_m\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi mn}{N}}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} f_n\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi np}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} g_m\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi mn}{N}}\right)\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi np}{N}}=\sum_{m=0}^{N-1} g_m\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi(m-p)n}{N}}$$

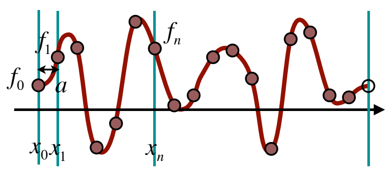
$$=N\sum_{m=0}^{N-1} g_m\delta_{m,p}=Ng_p$$

$$g_p=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi np}{N}}$$

離散フーリエ変換

$$f_n=\sum_{m=0}^{N-1} g_m\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi mn}{N}}\qquad (n=0,1,2,3,\cdots,N-1)$$

$$g_m=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi mn}{N}}\qquad (m=0,1,2,3,\cdots,N-1)$$



フーリエ係数の性質

- フーリエ係数の実部は偶関数，虚部は奇関数

$$g_m^*=\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi mn}{N}}\right)^*=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi(-m)n}{N}}=g_{-m}$$

$$(\Re g_m+i\Im g_m)^*=\Re g_m-i\Im g_m=\Re g_{-m}+i\Im g_{-m}$$

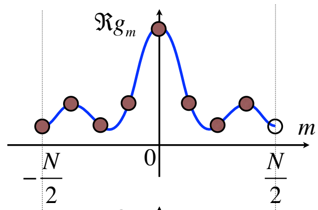
- フーリエ係数は周期関数（周期はサンプル数）

$$g_{m\pm N}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi(m\pm N)n}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi mn}{N}}\,\mathrm{e}^{-i2\pi n}=g_m$$

フーリエ係数の性質

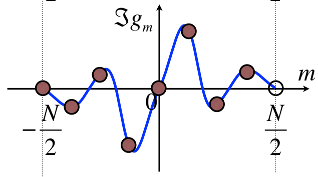
$$g_m^*=g_{-m}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Re g_m=\Re g_{-m}\\ \Im g_m=-\Im g_{-m}\\ \to\Im g_0=0\end{cases}$$



$$g_{m+N}=g_m$$

$$\Rightarrow\begin{cases}g_{m+N/2}=g_{m-N/2}\\ g_{m+N/2}^*=g_{-m-N/2}=g_{-m+N/2}\\ \to g_{N/2}^*=g_{N/2}\to\Im g_{N/2}=0\end{cases}$$



フーリエ係数の性質

$$f(x_n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} g_m \,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi mn}{N}}$$

$$f(x_n) = \pm f(-x_n)$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} g_m \,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi mn}{N}} = \pm\sum_{m=0}^{N-1} g_m \,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi m(-n)}{N}} = \pm\sum_{m=0}^{N-1} g_m \,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi(-m)n}{N}} = \pm\sum_{m'=0}^{N-1} g_{-m'} \,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi m'n}{N}}$$

$$\Rightarrow g_m = \pm g_{-m} = \pm g_m^*$$

- フーリエ係数は、展開する関数が
  - 偶関数のとき実数部のみ、
  - 奇関数のとき虚数部のみ

離散フーリエ変換(DFT)

$$\boxed{g_m = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi mn}{N}} \quad (m = 0,1,2,3,\cdots,N-1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Re g_m = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) \qquad \Im g_m = -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n \sin\left(\frac{2\pi mn}{N}\right)}$$

プログラム例(DFT)

```
int i, k;
double pi, arg, f[N], gr[N], gi[N];
pi = 4.0*atan(1.0);
for (k=0; k<N; k++) {
  gr[k] = 0.0;
  gi[k] = 0.0;
  for (i=0; i<N; i++) {
    arg = 2.0*pi*(double) i*k/(double) N;
    gr[k] = gr[k] + f[i]*cos(arg);
    gi[k] = gi[k] + f[i]*sin(arg);
  }
  gr[k] = gr[k]/(double) N;
  gi[k] = gi[k]/(double) N;
}
```

- $o(N^2)$回の乗算と三角関数の計算が必要

高速フーリエ変換(FFT)

- Nが偶数のとき

$$\boxed{N' = \frac{N}{2} \quad f'_{n'} = f_{2p} \quad f''_{n''} = f_{2p+1}}$$

$$\begin{aligned}
g_m &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi mn}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N/2-1} f_{2p} \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m(2p)}{N}} + \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N/2-1} f_{2p+1} \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m(2p+1)}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N/2-1} f_{2p} \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m(2p)}{N}} + \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{N}} \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N/2-1} f_{2p+1} \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m(2p)}{N}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{N/2}\sum_{p=0}^{N/2-1} f_{2p} \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi mp}{N/2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{N}} \frac{1}{2}\frac{1}{N/2}\sum_{p=0}^{N/2-1} f_{2p+1} \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi mp}{N/2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N'}\sum_{n'=0}^{N'-1} f'_{n'} \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi mn'}{N'}} + \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{N}} \frac{1}{N'}\sum_{n''=0}^{N'-1} f''_{n''} \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi mn''}{N'}}\right)
\end{aligned}$$

高速フーリエ変換(FFT)

$$g_m = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi mn}{N}} \Rightarrow \begin{cases} g_m = \frac{1}{2}\left(g_m^{(E)} + \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{N}} g_m^{(O)}\right) \\ g_{m+N/2} = \frac{1}{2}\left(g_m^{(E)} - \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{N}} g_m^{(O)}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_m^{(E)} = \dfrac{1}{N/2}\displaystyle\sum_{p=0}^{N/2-1} f_{2p} \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi mp}{N/2}} \\ g_m^{(O)} = \dfrac{1}{N/2}\displaystyle\sum_{p=0}^{N/2-1} f_{2p+1} \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi mp}{N/2}} \end{cases}$$

- $N=2^L$のときはこれを繰り返すことができる

高速フーリエ変換（例）

- $N=8=2^3$のとき

$$g_m = \frac{1}{8}\left(f_0 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m0}{8}} + f_1 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m1}{8}} + f_2 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m2}{8}} + f_3 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m3}{8}} + f_4 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m4}{8}} + f_5 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m5}{8}} + f_6 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m6}{8}} + f_7 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m7}{8}}\right)$$

$$g_m = \frac{1}{8}\left(f_0 + f_2 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{4}} + f_4 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m2}{4}} + f_6 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m3}{4}}\right) + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{8}}\left(f_1 + f_3 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m1}{4}} + f_5 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m2}{4}} + f_7 \,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m3}{4}}\right)$$

高速フーリエ変換（例）

- N=8=2^3のとき

$$g_m = \frac{1}{8}\left(f_0 + f_2\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{4}} + f_4\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m 2}{4}} + f_6\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m 3}{4}} \right)$$
$$+\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{8}}\left(f_1 + f_3\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m 1}{4}} + f_5\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m 2}{4}} + f_7\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m 3}{4}} \right)$$

$$g_m = \frac{1}{8}\left(\left(f_0 + f_4\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{2}} \right) + \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{4}}\left(f_2 + f_6\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{2}} \right) \right)$$
$$+\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{8}}\left(\left(f_1 + f_5\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{2}} \right) + \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{4}}\left(f_3 + f_7\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{2}} \right) \right)$$

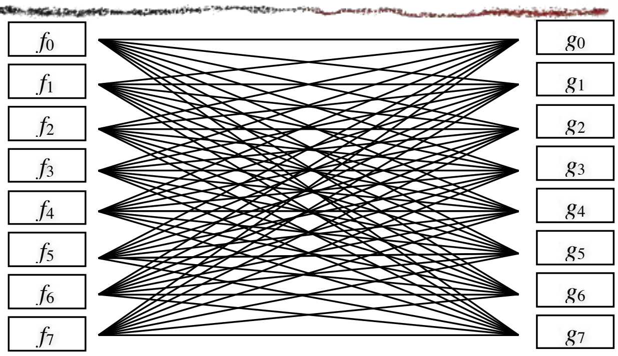
高速フーリエ変換（例）

- N=8=2^3のとき

$$g_m = \frac{1}{8}\left(\left(f_0 + f_4\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{2}} \right) + \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{4}}\left(f_2 + f_6\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{2}} \right) \right)$$
$$+\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{8}}\left(\left(f_1 + f_5\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{2}} \right) + \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{4}}\left(f_3 + f_7\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{2}} \right) \right)$$

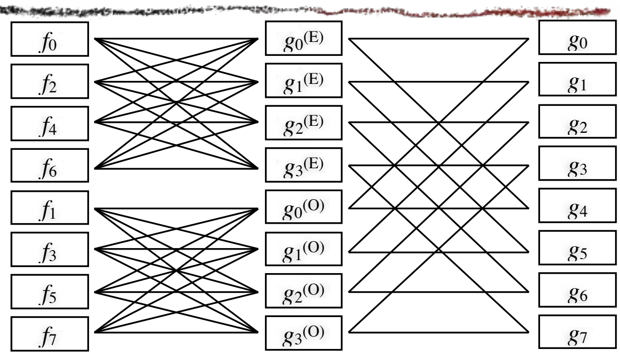
$$g_m = \frac{1}{8}\left(f_0 + f_4\,\mathrm{e}^{-i\pi m} \right) + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi m}{8}}\left(f_1 + f_5\,\mathrm{e}^{-i\pi m} \right)$$
$$+\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi 2m}{8}}\left(f_2 + f_6\,\mathrm{e}^{-i\pi m} \right) + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi 3m}{8}}\left(f_3 + f_7\,\mathrm{e}^{-i\pi m} \right)$$

通常の離散フーリエ変換



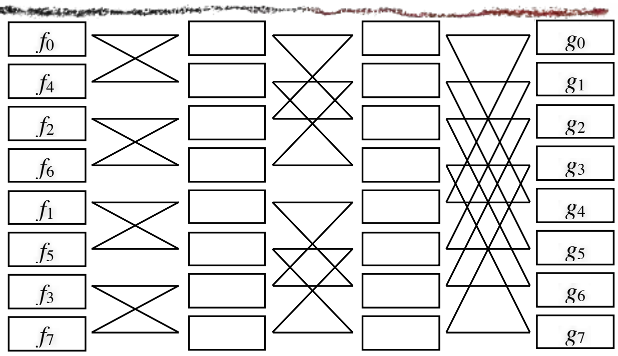
線の数64・計算量～$o(N^2)$

分割を一段階行った場合



線の数48・計算量～$o(2(N/2)^2 + 2N)$

高速フーリエ変換



線の数48・計算量～$o(2N\log_2 N)$

ビット逆順

f_0	000	→	000	f_0
f_1	001	→	100	f_4
f_2	010	→	010	f_2
f_3	011	→	110	f_6
f_4	100	→	001	f_1
f_5	101	→	101	f_5
f_6	110	→	011	f_3
f_7	111	→	111	f_7