数値積分法

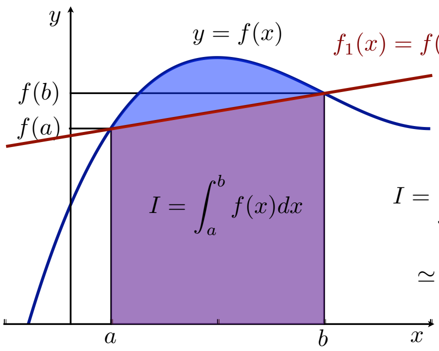
数値積分法

定積分 $I=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

の値を計算機を用いて数値的に求める

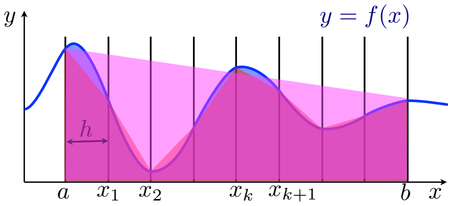
- 台形公式（矩形公式・中点公式）
- シンプソン法
- ガウス積分法

台形公式



$$I=\int_a^b f(x)dx$$
$$\simeq \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2}$$

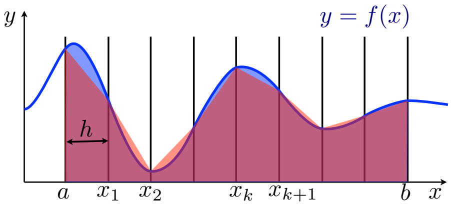
複合台形公式



$$h=\frac{b-a}{N}$$
$$x_k=x_0+hk$$
$$a=x_0$$
$$b=x_N$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{b-a}{N}\frac{1}{2}(f(a)+f(x_1))\\ &+\frac{b-a}{N}\frac{1}{2}(\qquad f(x_1)+f(x_2))\\ &+\frac{b-a}{N}\frac{1}{2}(\qquad\qquad f(x_2)+f(x_3))+\cdots\end{aligned}$$

複合台形公式

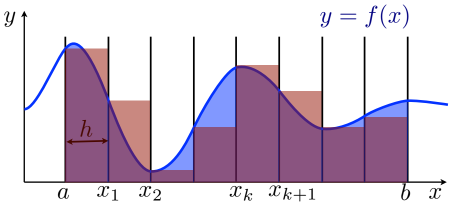


$$h=\frac{b-a}{N}$$
$$x_k=x_0+hk$$
$$a=x_0$$
$$b=x_N$$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}\{f(x_0)+f(x_1)\}+\frac{h}{2}\{f(x_1)+f(x_2)\}+\cdots$$

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_N} f(x)dx=h\left(\frac{f(x_0)}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}f(x_k)+\frac{f(x_N)}{2}\right)}$$

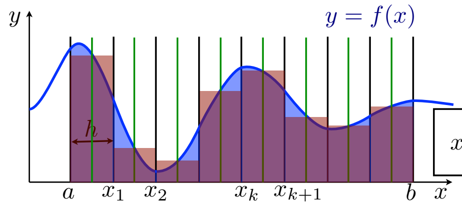
矩形公式（台形公式の変種）



$$h=\frac{b-a}{N}$$
$$x_k=x_0+hk$$
$$a=x_0$$
$$b=x_N$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=h\sum_{k=0}^{N-1}f(x_k)}$$

中点公式（台形公式の変種）

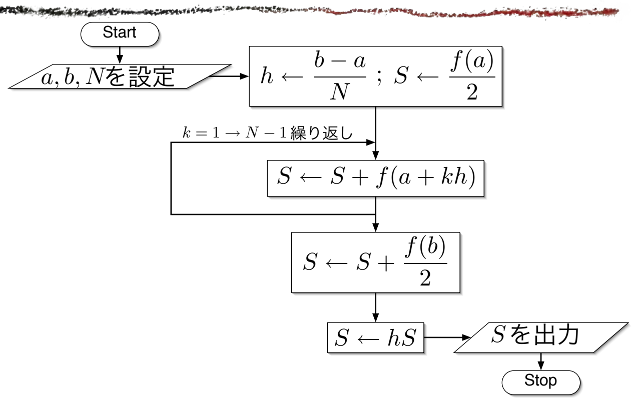


$$h = \frac{b-a}{N}$$

$$x_k = a + \left(k + \frac{1}{2}\right) h$$

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)$$

台形公式のアルゴリズム



台形公式のプログラム

```
int k, n = 100;
double dh, s, xk, xa = 0.0, xb = 1.0;
dh = (xb -xa)/(double) n;
s = fnctv(xa)*0.5;
for (k=1; k<n; k++) {
  xk = xa + dh*(double) k;
  s = s + fnctv(xk);
}
s = s + fnctv(xb)*0.5;
s = s*dh;
printf ("I = %f\n", s);
```


例題1（台形公式）

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$$

正しい答えは

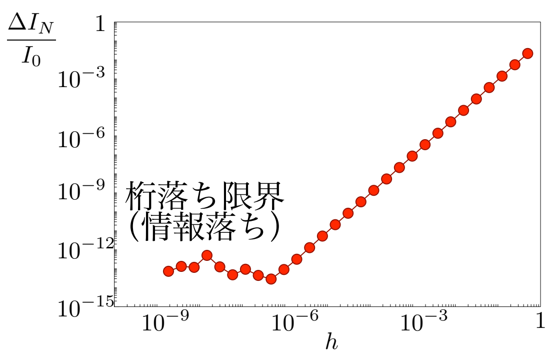
$I = \ln 2 = 0.693147\cdots$

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double fnctv(double x);
int main(void) {
  台形公式のプログラム
  return 0;
}
double fnctv(double x){
  return 1.0/(x + 1.0);
}
```

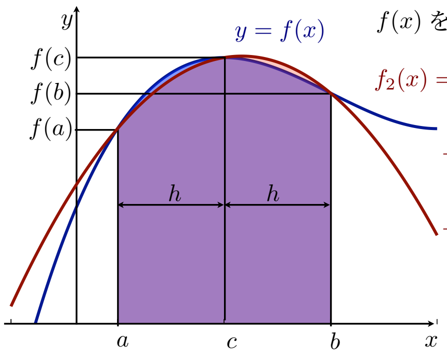

例題1（台形公式）

分割数	刻み幅	積分値	誤差
2	0.5	0.708333	2.1908987E-02
4	0.25	0.697024	5.5927934E-03
8	0.125	0.694122	1.4061513E-03
16	0.0625	0.693391	3.5204882E-04
32	0.03125	0.693208	8.8044374E-05
64	0.015625	0.693162	2.2013108E-05
128	0.007812	0.693151	5.5034028E-06
256	0.003906	0.693148	1.3758586E-06
512	0.001953	0.693147	3.4396514E-07
1024	0.000977	0.693147	8.5991315E-08

例題1（台形公式の誤差）



シンプソン公式

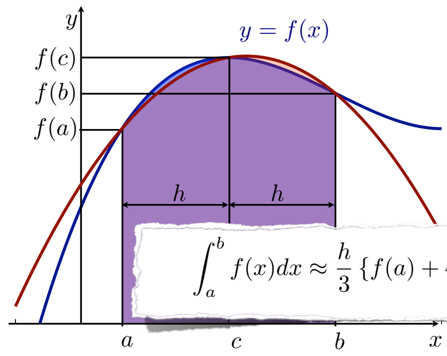


$f(x)$ を2次関数で近似

$$f_2(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$\begin{aligned} h &= c-a \\ &= b-c \\ 2h &= b-a \end{aligned}$$

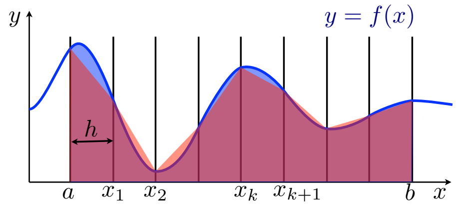
シンプソン公式



$$\begin{aligned} h &= c-a \\ &= b-c \\ 2h &= b-a \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\{f(a)+4f(c)+f(b)\}$$

複合シンプソン公式



$$h = \frac{b-a}{N}$$

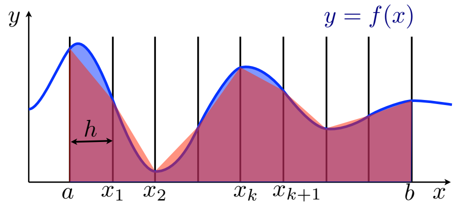
$$x_k = x_0 + hk$$

$$a = x_0$$

$$b = x_N$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \approx{}& \frac{h}{3}\{f(a)+4f(x_1)+f(x_2)\} \\ &+\frac{h}{3}\{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\} \\ &+\frac{h}{3}\{f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6)\}+\cdots \end{aligned}$$

複合シンプソン公式



$$h = \frac{b-a}{N}$$

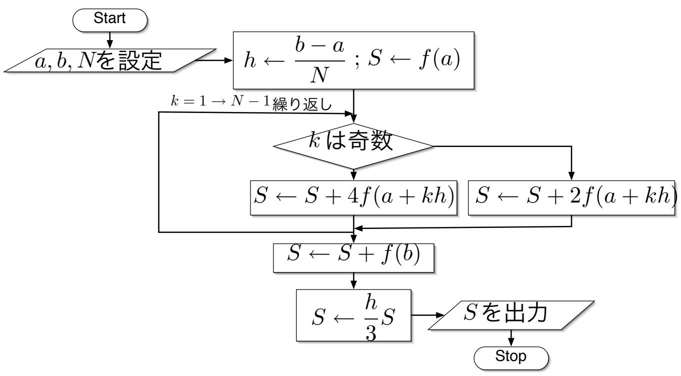
$$x_k = x_0 + hk$$

$$a = x_0$$

$$b = x_N$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left\{ f(a) + 4\sum_{\ell=1}^{\frac{N}{2}} f(x_{2\ell-1}) + 2\sum_{\ell=1}^{\frac{N}{2}-1} f(x_{2\ell}) + f(b) \right\}$$

シンプソン公式のアルゴリズム



シンプソン公式のプログラム

```
int k, n = 100;
double dh, s, xk, xa = 0.0, xb = 1.0;
dh = (xb -xa)/(double) n;
s = fnctv(xa);
for (k=1; k<n; k++) {
  xk = xa + dh*(double) k;
  if (k%2!=0) { s = s + 4.0*fnctv(xk);}
  else        { s = s + 2.0*fnctv(xk);}
}
s = s + fnctv(xb);
s = dh*s/3.0;
printf ("I = %f\n", s);
```

シンプソン公式のプログラム

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main(void) {
  int k, n, nn = 100;
  double so, se, s, dh;
  double xk, xa = 0.0, xb = 1.0;
  dh = (xb - xa)/(double) nn;
  n = nn/2;
  s = fnctv(xa) + fnctv(xb);
  so = 0.0;
  for (k=1; k<=n; k++) {
    xk = xa + dh*(double) (2*k - 1);
    so = so + fnctv(xk);
  }
  se = 0.0;
  for (k=1; k<n; k++) {
    xk = xa + dh*(double) (2*k);
    se = se + fnctv(xk);
  }
  s = dh*(s + 4.0*so + 2.0*se)/3.0;
  printf("I = %f\n", s);
  return 0;
}
```


例題1（シンプソン公式）

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$$

正しい答えは

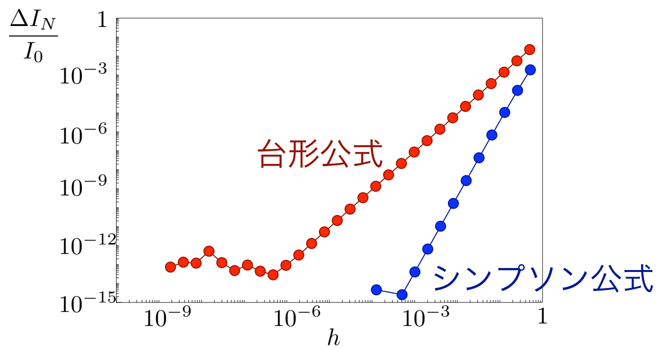
$$I = \ln 2 = 0.693147\cdots$$

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double fnctv(double x);
int main(void) {

  シンプソン公式のプログラム

  return 0;
}
double fnctv(double x){
  return 1.0/(x + 1.0);
}
```


例題1（シンプソン公式）

分割数	刻み幅	積分値	誤差
4	0.25	0.693254	1.5406208E-04
8	0.125	0.693155	1.0603945E-05
16	0.0625	0.693148	6.813264E-07
32	0.03125	0.693147	4.2891147E-08
64	0.015625	0.693147	2.6855907E-09
128	0.007812	0.693147	1.679257E-10
256	0.003906	0.693147	1.0496668E-11
512	0.001953	0.693147	6.5574141E-13
1024	0.000977	0.693147	4.0683517E-14

例題1（シンプソン公式の誤差）



例題2

$\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx$ を計算せよ。

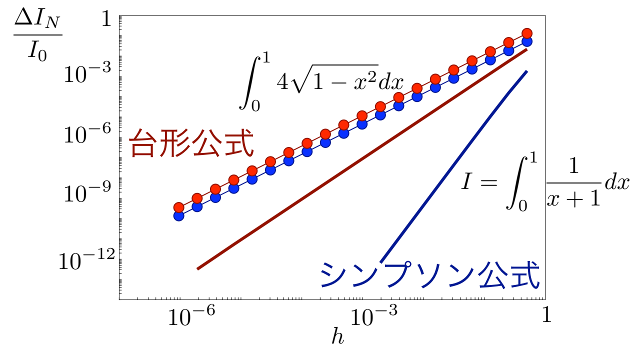
（正しい答えは $\pi = 3.141592\cdots$ ）

```c
double fnctv(double x){
  double x2, f;
  x2 = x*x;
  f = 4.0*sqrt(1.0 - x2);
  return f;
}
```


例題2（計算結果）

	台形公式		シンプソン公式	
分割数	積分値	誤差	積分値	誤差
4	2.995709	4.644E-02	3.083595	1.846E-02
8	3.089819	1.648E-02	3.121189	6.495E-03
16	3.123253	5.838E-03	3.134398	2.29E-03
32	3.135102	2.066E-03	3.139052	8.086E-04
64	3.139297	7.308E-04	3.140695	2.857E-04
128	3.140781	2.584E-04	3.141275	1.01E-04
256	3.141306	9.138E-05	3.141481	3.57E-05
512	3.141491	3.231E-05	3.141553	1.262E-05
1024	3.141557	1.142E-05	3.141579	4.461E-06

例題2（誤差）



積分公式の誤差

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$I_N = h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(a+kh) + \frac{f(b)}{2}\right) \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

$$|I_N - I| = c_2 h^2 |f'(b) - f'(a)| \ + \cdots \ + O(h^{2p+2})$$

$$\left| \frac{I_N - \frac{I_{\frac{N}{2}}}{4}}{1-\frac{1}{4}} \right| = c_4 h^4 |f'''(b) - f'''(a)| + \cdots \quad \text{シンプソン公式}$$

$f^{(2p+1)}(a), f^{(2p+1)}(b) \to \pm\infty$ のときはこの見積は使えない

例題2（特異点の除去）

$$4\sqrt{1-x^2} = 4\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}$$

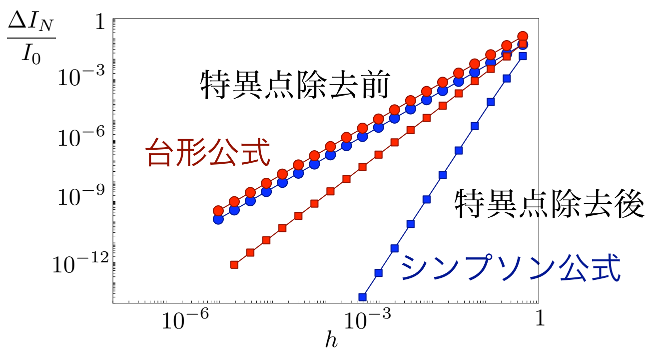
$1-x=t^2$ と置くと、 $\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 8t^2\sqrt{2-t^2}dt$

```
double fnctv(double t){
  double t2, f;
  t2 = t*t;
  f = 8.0*t2*sqrt(2.0 - t2);
  return f;
}
```

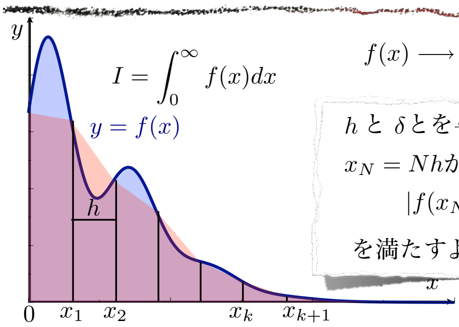

例題2（台形公式）

	特異点除去前		特異点除去後	
分割数	積分値	誤差	積分値	誤差
2	2.732051	1.304E-01	3.322876	5.77E-02
4	2.995709	4.644E-02	3.184258	1.358E-02
8	3.089819	1.648E-02	3.152074	3.336E-03
16	3.123253	5.838E-03	3.144201	8.302E-04
32	3.135102	2.066E-03	3.142244	2.073E-04
64	3.139297	7.308E-04	3.141755	5.181E-05
128	3.140781	2.584E-04	3.141633	1.295E-05
256	3.141306	9.138E-05	3.141603	3.238E-06
512	3.141491	3.231E-05	3.141595	8.095E-07
1024	3.141557	1.142E-05	3.141593	2.024E-07

例題2（特異点除去と誤差）



半無限区間での台形公式



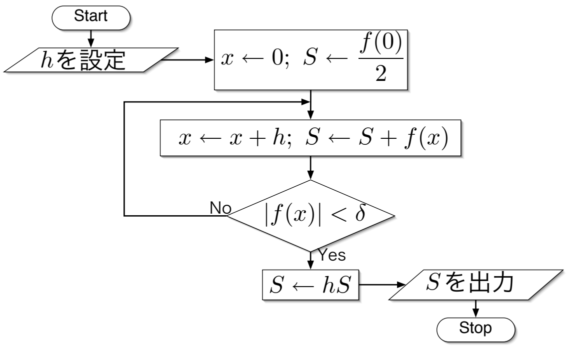
$$f(x) \longrightarrow \begin{cases} e^{-x} \\ e^{-x^2} \end{cases} \quad (x \longrightarrow \infty)$$

h と δ とを与えて
$x_N = Nh$ が
$|f(x_N)| < \delta$
を満たすように N を決める

$x_k = kh$

$$\int_0^\infty f(x)dx \approx h\left\{\frac{f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right\}$$

半無限区間に対するアルゴリズム



プログラム例(1)

```
int k;
double s, f, x = 0.0, dh=0.01;
s = fnctv(x)/2.0;
for (k=1; k<=N; k++) {
  x = x + dh;
  f = fnctv(x);
  s = s + f;
  if (fabs(f) < DELTA) {
    printf("I = %f\n", dh*s);
    return 0;
  }
}
```


プログラム例(2)

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define N 10000
#define DELTA 1.0e-7
double fnctv(double x);
int main(void) {
  プログラム例(1)
  printf("NOT CONVERGENT\n");
  return 1;
}
```


例題3（半無限区間）

$\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ を計算する.

（正しい答えは1）

```
double fnctv(double x) {
      return exp(-x);
}
```


例題3（実行結果）

$\delta = 10^{-14}$

刻み幅	分割数	積分値	誤差
2.5E-01	129	1.005203	5.203E-03
1.25E-01	258	1.001302	1.302E-03
6.25E-02	516	1.000325	3.255E-04
3.125E-02	1032	1.000081	8.138E-05
1.562E-02	2064	1.00002	2.034E-05
7.812E-03	4127	1.000005	5.086E-06
3.906E-03	8253	1.000001	1.272E-06
1.953E-03	16505	1	3.179E-07
9.766E-04	33010	1	7.947E-08