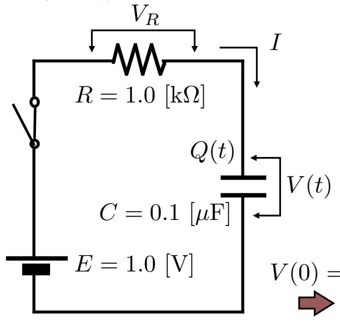
関数値の計算と数値微分

RC直列回路の過渡現象



$$V_R = IR = R\frac{d}{dt}Q(t)$$
$$Q(t) = CV(t)$$
$$V_R + V(t) = E$$
$$RC\frac{d}{dt}V(t) + V(t) = E$$

$V(0) = 0$

➡ $V(t) = E\left(1 - \exp\left[-\frac{t}{RC}\right]\right)$

$RC = 1.0\ [\mathrm{k\Omega}] \times 0.1\ [\mu\mathrm{F}] = 0.1[\mathrm{ms}]$

数式と単位系

$$\frac{d}{dt}V(t) = -\frac{1}{RC}V(t) + \frac{E}{RC}$$

$E = 1.0\ [\mathrm{V}] = 0.001\ [\mathrm{kV}]$

$RC = \tau = 0.1\ [\mathrm{ms}] = 100\ [\mu\mathrm{s}]$

- 電圧を[V]，時間を[ms]で表すと
  $$\frac{d}{dt}V(t) = -10V(t) + 10$$
- 電圧を[kV]，時間を[μs]で表すと
  $$\frac{d}{dt}V(t) = -0.01V(t) + 0.00001$$

➪単位によって数式が変わってしまう

変数の無次元化

$$\frac{d}{dt}V(t) = -\frac{1}{RC}V(t) + \frac{E}{RC}$$

$E = 1.0$ [V]

$RC = \tau = 0.1$ [ms]

- 電圧をE，時間をτで測ることにする

$$x = \frac{t}{RC} = \frac{t}{\tau}, \quad y = \frac{V(\tau x)}{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}y(x) = -y(x) + 1$$

➪無次元な量だけの方程式になる

問題の無次元化

次元を持った問題

$$\frac{d}{dt}V(t) = -\frac{1}{RC}V(t) + \frac{E}{RC}$$

⇩

無次元化

$\tau = RC \qquad x = \frac{t}{\tau} \qquad y(x) = \frac{V(\tau x)}{E}$

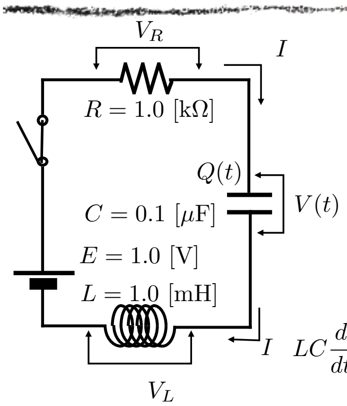
$$\frac{d}{dx}y(x) = -y(x) + 1$$

⇩

適切な単位系を選び次元を復活

$$V(t) = E \cdot y(t/\tau)$$

LCR直列回路の過渡現象



$$V_R = IR = R\frac{d}{dt}Q(t)$$
$$V_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2}{dt^2}Q(t)$$
$$Q(t) = CV(t)$$
$$V_L + V_R + V(t) = E$$
$$LC\frac{d^2}{dt^2}V(t) + RC\frac{d}{dt}V(t) + V(t) = E$$

LCR直列回路の過渡現象

$$LC\frac{d^2}{dt^2}V(t)+RC\frac{d}{dt}V(t)+V(t)=E$$

$$L=1.0\ [\mathrm{mH}]\qquad C=0.1\ [\mu\mathrm{F}]\qquad R=1.0\ [\mathrm{k}\Omega]$$

$$\begin{aligned}LC&=1.0\ [\mathrm{mH}]\times 0.1\ [\mu\mathrm{F}] & RC&=1.0\ [\mathrm{k}\Omega]\times 0.1\ [\mu\mathrm{F}]\\ &=1.0\times10^{-10}\ [\mathrm{s}^2] & &=1.0\times10^{-4}\ [\mathrm{s}]\\ &\equiv\tau_1^2 & &\equiv\tau_2\\ \tau_1&=1.0\times10^{-5}[\mathrm{s}] & \tau_2&=0.1[\mathrm{ms}]\\ &=10\ [\mu\mathrm{s}] & &\end{aligned}$$

$$\tau_1^2\frac{d^2V}{dt^2}+\tau_2\frac{dV}{dt}+V=E$$

LCR直列回路の過渡現象

$$x\equiv\frac{t}{\tau_1}\quad y\equiv\frac{V}{E}\quad 2a\equiv\frac{\tau_2}{\tau_1}$$

$$\tau_1^2\frac{d^2V}{dt^2}+\tau_2\frac{dV}{dt}+V=E$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2a\frac{dy}{dx}+y=1$$

$$a=\frac{\tau_2}{2\tau_1}=\frac{0.1\ [\mathrm{ms}]}{2\times10\ [\mu\mathrm{s}]}=5$$

定係数2階常微分方程式の解

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2a\frac{dy}{dx}+y=1\qquad y(0)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$$

1) $a^2>1\ \rightarrow b\equiv\sqrt{a^2-1}$

$$y(x)=1-e^{-ax}\left[\cosh(bx)+\frac{a}{b}\sinh(bx)\right]$$

2) $a^2=1$

$$y(x)=1-e^{-x}(1+x)$$

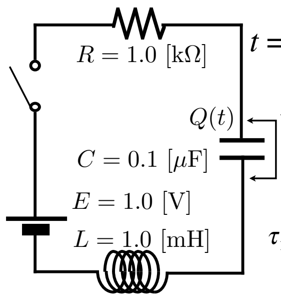
3) $a^2<1\ \rightarrow b\equiv\sqrt{1-a^2}$

$$y(x)=1-e^{-ax}\left[\cos(bx)+\frac{a}{b}\sin(bx)\right]$$

LCR直列回路の過渡現象

次のLCR回路の$V(t)$を

$t=0$〜$500[\mu\mathrm{s}]$の範囲で求めよ



$$LC\frac{d^2}{dt^2}V(t)+RC\frac{d}{dt}V(t)+V(t)=E$$

$$\tau_1^2\frac{d^2V}{dt^2}+\tau_2\frac{dV}{dt}+V=E$$

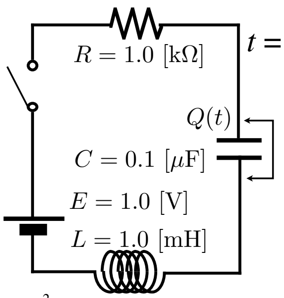
$$\tau_1=\sqrt{LC}=10[\mu s]\quad \tau_2=RC=100[\mu s]$$

$$x=\frac{t}{\tau_1}\quad y=\frac{V}{E}\ \Rightarrow\ \frac{d^2y}{dx^2}+10\frac{dy}{dx}+y=1$$

LCR直列回路の過渡現象

次のLCR回路の$V(t)$を

$t=0$〜$500[\mu\mathrm{s}]$の範囲で求めよ



$$\tau_1=\sqrt{LC}=10[\mu s]$$

$$x=\frac{t}{\tau_1}\qquad y=\frac{V}{E}$$

$$\tau_1=10[\mu s]$$

$\frac{d^2y}{dx^2}+10\frac{dy}{dx}+y=1$ の解をx =0〜50の範囲で求める

LCR直列回路の過渡現象

$$\frac{d^2y}{dx^2}+10\frac{dy}{dx}+y=1\qquad y(0)=0\quad \frac{dy}{dx}(0)=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2a\frac{dy}{dx}+y=1\qquad y(0)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$$

1) $a^2>1\ \rightarrow b\equiv\sqrt{a^2-1}$

$$y(x)=1-e^{-ax}\left[\cosh(bx)+\frac{a}{b}\sinh(bx)\right]$$

$$a=5\quad b=\sqrt{24}$$

$$y=1-e^{-5x}\left[\cosh\sqrt{24}x+\frac{5}{\sqrt{24}}\sinh\sqrt{24}x\right]\ \Rightarrow\ \begin{cases}t=\tau_1x\\ V=Ey\end{cases}$$

プログラム例(1)

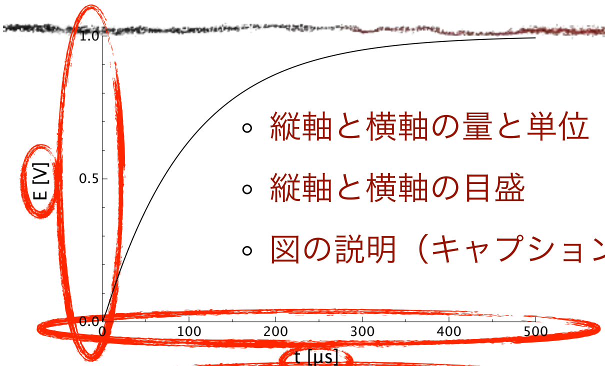
```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define N 100
double fncv(double x);
int main(void) {
  int i;
  double tau = 10.0, e0 = 1.0;
  double xmin = 0.0, xmax = 50.0, x, y, dh;
  dh = (xmax - xmin)/(double) N;
  for (i=0; i<=N; i++) {
    x = xmin + dh*(double) i;
    y = fncv(x);
    printf ("%f %f\n", tau*x, e0*y);
  }
  return 0;
}
```

関数の定義

$$y = 1 - e^{-5x}\left[\cosh\sqrt{24}x + \frac{5}{\sqrt{24}}\sinh\sqrt{24}x\right]$$

```
double fncv(double x) {
  double a = 5.0, b;
  double c1, c2, val;
  b = sqrt(a*a - 1.0);
  c1 = cosh(b*x);
  c2 = a*sinh(b*x)/b;
  val = 1.0 - exp(-a*x)*(c1 + c2);
  return val;
}
```

関数値の計算（計算結果）



- 縦軸と横軸の量と単位
- 縦軸と横軸の目盛
- 図の説明（キャプション）

図1: コンデンサ端電圧の時間変化

数値微分

x の関数 $y(x)$ が与えられたとき，

$y(x)$ の x に関する導関数（一階微分）は

$$\frac{d}{dx}y(x) = \lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}$$

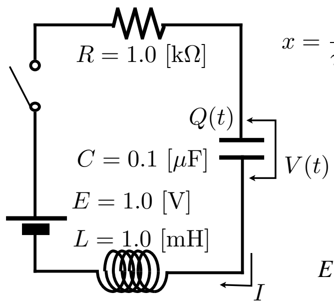
で定義される．

これを適当に小さな数 h に対して

$$\frac{d}{dx}y(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$$

で近似的に計算する．

LCR直列回路に流れる電流



$$Q(t) = CV(t) \quad I(t) = \frac{d}{dt}Q(t) = C\frac{d}{dt}V(t)$$

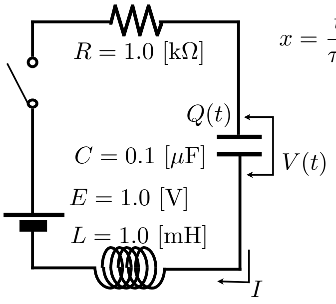
$$x = \frac{t}{\tau_1} = \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad y = \frac{V}{E}$$

$$I = C\frac{dV}{dt} = C\frac{dV}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = CE\frac{dy}{dx}\frac{1}{\sqrt{LC}} = E\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{dy}{dx}$$

$$E\sqrt{\frac{C}{L}} = 1.0\times\sqrt{\frac{0.1\times 10^{-6}}{1.0\times 10^{-3}}} = 1.0\times 10^{-2}[\mathrm{A}] = 10[\mathrm{mA}] \equiv I_0$$

LCR直列回路に流れる電流

時刻 $t = 5$ [μs] における電流を計算せよ



$x = \frac{t}{\tau_1}$　$y = \frac{V}{E}$　　$\tau_1 = 10[\mu s]$

$I = I_0 \frac{dy}{dx}$　　$I_0 = 10[\text{mA}]$

$$\frac{d}{dx} y(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$x = \frac{5}{10} = 0.5$

プログラム例(2)

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double fncv(double x);
int main(void) {
  double di0 = 10.0;
  double x, dy;
  double dh = 0.01;
  x = 0.5;
  dy = (fncv(x + dh) - fncv(x))/dh;
  printf ("I = %f[mA]\n", dy*di0);
  return 0;
}
```

厳密解の関数の定義

$$y = 1 - e^{-5x}\left[\cosh\sqrt{24}x + \frac{5}{\sqrt{24}}\sinh\sqrt{24}x\right]$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{24}} e^{-5x} \sinh\sqrt{24}x$$

```
double fncdv(double x) {
  double a = 5.0, b;
  double val;
  b = sqrt(a*a - 1.0);
  val = exp(-a*x)*sinh(b*x)/b;
  return val;
}
```

数値微分（計算結果）

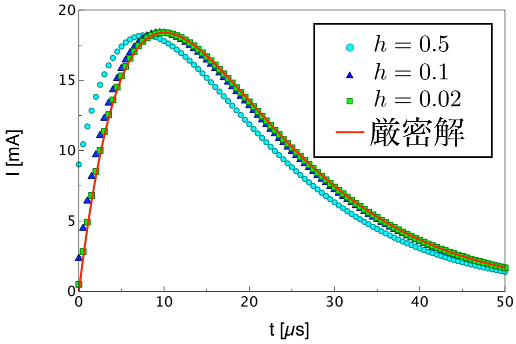
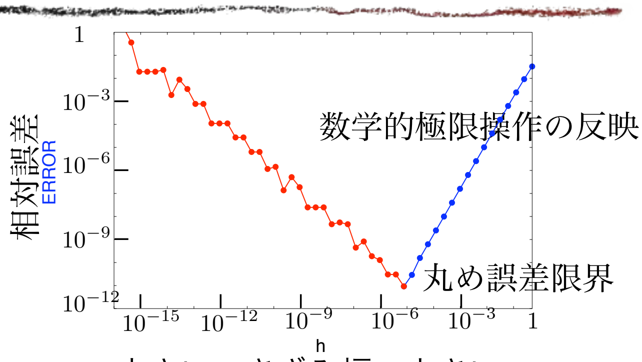


図2: 流れる電流の時間変化

きざみ幅と誤差



小さい←きざみ幅→大きい