

モンテカルロ法

Monte Carlo Method

モンテカルロ法と乱数

- 乱数を用いた計算法の総称
 - 数値積分
 - 物理現象のシミュレーション
 - 在庫管理、交通量、待ち行列などのシミュレーション
- 問題が正攻法で解けないときの最後の手段

多重積分 (2次元)

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{n}{N}\right)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dx dy = \int_0^1 \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{n}{N}, y\right) dy = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 f\left(\frac{n}{N}, y\right) dy$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f\left(\frac{n}{N}, \frac{m}{M}\right) = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f\left(\frac{n}{N}, \frac{m}{M}\right)$$

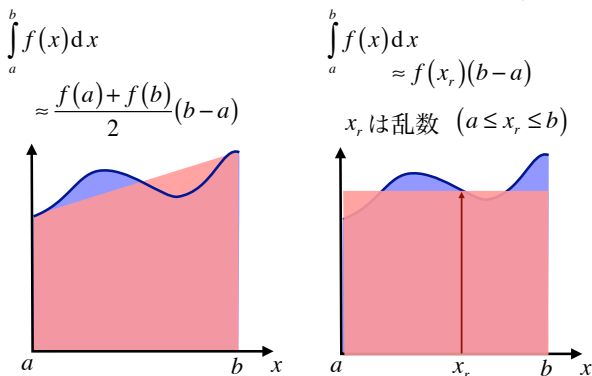
多重積分

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, x_2, \dots, x_L) dx_1 dx_2 \cdots dx_L = \frac{1}{N^L} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \cdots \sum_{n_L=0}^{N-1} f\left(\frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N}, \dots, \frac{n_L}{N}\right)$$

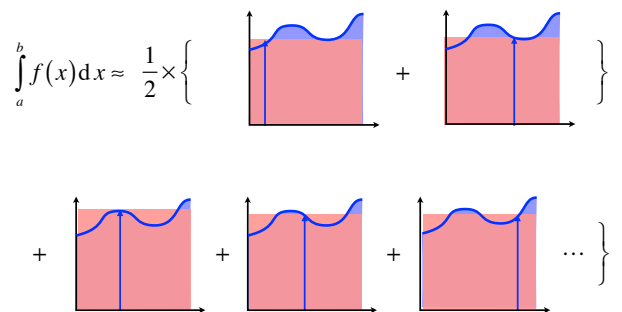
- L 重積分を行うためには N^L 回の和の計算が必要
- $L=100$ ならば $N=2$ でも $2^{100} \approx 10^{30}$ 回の和が必要
- 1PFLOPSの計算機=毎秒 10^{15} 回の実数計算が可能
- 1年が 3×10^7 秒なので $10^{30} \div 10^{15} \div (3 \times 10^7) = 0.3 \times 10^8$ 年
- 1PFLOPSの計算機でも3000万年かかる

■ **モンテカルロ法**

モンテカルロ法



モンテカルロ法



モンテカルロ法(プログラム例)

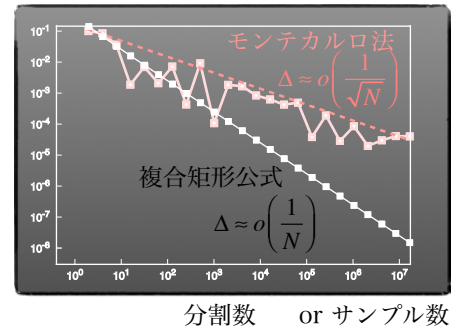
複合矩形公式 h=(b-a)/(double)N; s=0.0; for(k=0;k<N;k++){ x=a+h*(double) k; s=s+f(x); } s=s*h;	モンテカルロ法 h=(b-a)/(double)N; s=0.0; for(k=0;k<N;k++){ x=a+(b-a)*RND(); s=s+f(x); } s=s*h;
--	--

RND(): 0から1の一様乱数を返す関数

7

モンテカルロ法の誤差

$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ の相対誤差



分割数 or サンプル数

8

モンテカルロ法の利点

多重積分

$$\int_1^2 \int_1^2 \dots \int_1^2 f(x_1, x_2, \dots, x_L) dx_1 dx_2 \dots dx_L$$

$$\approx \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \dots \sum_{n_L=0}^{N-1} f\left(\frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N}, \dots, \frac{n_L}{N}\right) \quad N^L \text{個の和}$$

$$\approx \sum_{k=0}^{N-1} f(R_1^{(k)}, R_2^{(k)}, \dots, R_L^{(k)}) \quad \text{NL個の乱数+N個の和}$$

計算対象がそもそも確率過程

9

乱数の応用例

- ランダムな現象のシミュレーション
 - 粒子の衝突
 - 客がでたらめな時間間隔で到着する
- 大きな集団の中から小数の標本を取り出す
 - 原子、分子の状態
 - 世論調査

10

乱数

乱数

- でたらめに並んだ数字の列

疑似乱数

- 計算機などを用いて生成したでたらめに近い数字の列
 - 再現性
 - 周期性

11

乱数の作製法

- サイコロを振る
 - 例: 正20面体サイコロ
- 物理現象を利用する
 - 例: 放射線、電流のノイズ
- 国勢調査などの中から数字を抜き出す
- ある規則に従って「乱数のようなもの」を作る
 - 疑似乱数

12

(一様)疑似乱数

- 乱数の性質のうちいくつかを再現する数列
 - それぞれの数が出現する頻度が一様
 - (一桁の整数の乱数)
 - 5の次に6が来る頻度は1/10
 - (0と1の乱数)
 - 長さ $n+1$ の連の個数と長さ n の連の個数の比は1/2
 - 一部を取り出しても偏りが無い。
 - ⇒ 局所ランダム性

13

一様乱数の発生法

- 線形合同法
- *Lagged Fibonacci*法
- *M*系列法
- *Mersenne Twister*法

14

線形合同法

- 線形合同法 (*Lehmer 1948*)

- $X_n = (aX_{n-1} + c) \bmod M$

M	法	$M > 0$
a	乗数	$0 \leq a < M$
c	増分	$0 \leq c < M$
X_0	初期値	$0 \leq X_0 < M$

- 乗算合同法

- $X_n = (aX_{n-1}) \bmod M$

15

線形合同法の例

$$c = 0, a = 11, M = 2^5 = 32, X_0 = 1$$

				1
1*	11	Mod 32 =		11
11*	11	Mod 32 =	121	Mod 32 = 25
25*	11	Mod 32 =	275	Mod 32 = 19
19*	11	Mod 32 =	209	Mod 32 = 17
17*	11	Mod 32 =	187	Mod 32 = 27
27*	11	Mod 32 =	297	Mod 32 = 9
9*	11	Mod 32 =	99	Mod 32 = 3
3*	11	Mod 32 =	33	Mod 32 = 1

- 周期：8

16

線形合同法の特徴

- 0から $M-1$ の間の整数の乱数を生成する
- n 番目の乱数は $n-1$ 番目の乱数により決まる
- 最大周期は M である
- 1周期の中に同じ数は2度出てこない
- a と M は互いに素にとらないと十分にデタラメにならない
- 結晶構造になる

17

線形合同法の実装系

- $X_n = (aX_{n-1} + c) \bmod M$
- rand (Cの元標準乱数)
 - $a=1103515245, c=12345, M=2^{31}$ (BSD)
- drand48 (randの代替標準乱数)
 - $a=25214903917, c=11, M=2^{48}$

18

実数の一様乱数

$[0, M-1]$ の乱数 $\{x_i\}$ を $[0, 1)$ の乱数 $\{u_i\}$ に変換

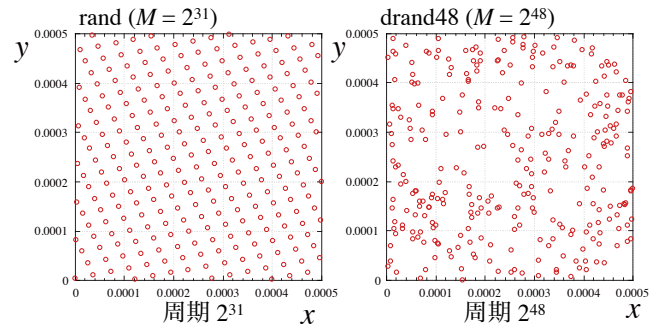
○ $u_i = x_i/M$

例) $c = 0, a = 177, M = 2^{15}, X_0 = 1$

- (1) $1 / 2^{15} = 0.00003051758$
- (2) $177 / 2^{15} = 0.00540161133$
- (3) $31329 / 2^{15} = 0.95608520508$
- (4) $7441 / 2^{15} = 0.22708129883$
- (5) $6337 / 2^{15} = 0.19338989258$

19

二次元結晶構造



2^{31} 個発生させ、2個ずつペアにしてx-y座標としてプロット

20

Lagged Fibonacci法

$$X_n = f(X_{n-r}, X_{n-s}) \text{ Mod } M$$

r, s, M : 整数, $r > s$

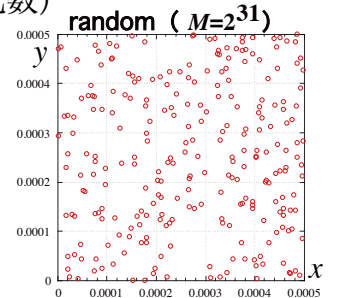
$$X_n = (X_{n-r} + X_{n-s}) \text{ Mod } M$$

- 周期は最大 $2^w - 1(2^r - 1)$ (w はワード長)
- 連続する乱数の和の分布が正規分布からずれる

21

Lagged Fibonacci法の実装系

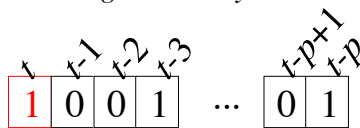
- $X_n = (X_{n-r} + X_{n-s}) \text{ Mod } M$
- random (Cの現標準乱数)
 - $r=31, s=28, M=2^{31}$
 - 周期 $\sim 2^{62}$



22

M系列法(線形最大周期列法)

Maximum length linearly recurring sequence



$$a_t = c_1 a_{t-1} \oplus c_2 a_{t-2} \oplus \dots \oplus c_p a_{t-p}$$

$c_i = 0, 1$

排他的論理和

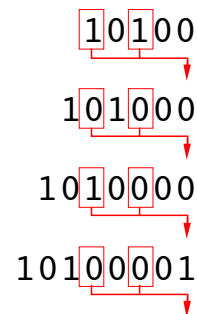
$c_p = 1$

	\oplus	1	0
1		0	1
0		1	0

23

M系列法(線形最大周期列法)

- $c_p = c_q = 1$
- $c_i = 0 (i \neq p, q)$
- $\Rightarrow R_n = R_{n-p} \oplus R_{n-q}$
- $p=5, q=3$
- 1ビット



24

M系列法の例

◦ $R_n = R_{n-p} \oplus R_{n-q}$ 初期乱数: 1, 5, 2, 7, 6

- $p=5, q=3$
- 3ビット

1	001	0	000	6	110
5	101	3	011	0	000
2	010	2	010	0	000
7	111	7	111	3	011
6	110	5	101	1	001
3	011	2	010	6	110
2	010	4	100	3	011
4	100	7	111	1	001
4	100	5	101	5	101
4	100	1	001	2	010
7	111	5	101	7	111
6	110	1	001	6	110

25

M系列法の実装例

$$R_n = R_{n-p} \oplus R_{n-q}$$

- 周期は 2^p-1 で比較的長い。
- 演算が単純⇒高速
- 結晶構造にならない。

p	q
89	38
127	1, 7, 15, 30, 63
250	103
521	32, 48, 158, 168
607	105, 147, 273

26

Mersenne-Twister法

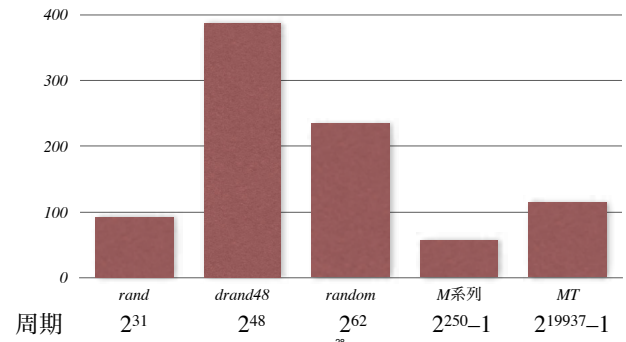
$$x_{n+p} = x_{n+q} \oplus x_{n+1}B \oplus x_nA$$

- 松本-西村 1997
- B, A はある特別な $w \times w$ 行列
- p, q はある特別な整数
- 周期は $2^{19937}-1$
- 623次元空間で均等に分布

27

一様乱数の生成法

◦ 2^{31} 個の乱数生成に要する時間 (秒)



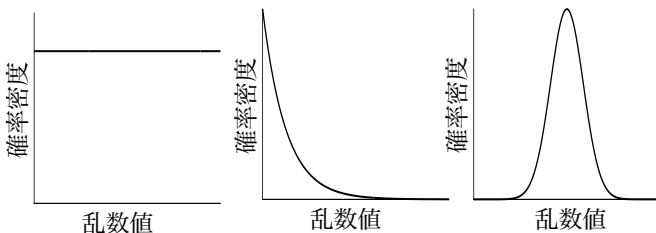
28

分布をもった乱数

一様分布

指数分布

正規分布



29

指数分布

◦ 逆関数法

$\{u_i\}$ ($0 \leq u_i < 1$): 一様乱数



$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln u_i$$

$\{x_i\}$: $f(x) \propto e^{-\lambda x}$ の指数分布に従う乱数

30

正規分布

。極座標法(Box-Muller 法)

$\{u_i\}, \{v_i\}$ ($0 \leq u_i, v_i < 1$) : 一様乱数



$$x_i = \sqrt{-2 \ln u_i} \cos(2\pi v_i)$$

$$y_i = \sqrt{-2 \ln u_i} \sin(2\pi v_i)$$

$\{x_i\}, \{y_i\}$: 平均0, 標準偏差1の正規分布に従う乱数

31

正規分布

。中心極限定理

$\{u_i\}$ ($0 \leq u_i < 1$) : 一様乱数



$$x_k = (u_{12k} + u_{12k+1} + u_{12k+2} + u_{12k+3} + \dots + u_{12k+11}) - 6$$

$\{x_k\}$: 平均0, 標準偏差1の正規分布に従う乱数

32