固有値と固有ベクトル

行列の対角化

行列の対角化

行列 A に対して

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

を満たす

　ベクトル $\vec{x}$ (固有ベクトル) と

　値　　　λ (固有値) と

の組を求める.

- 時間に依存しないシュレディンガー方程式
- 導波管や光ファイバー内の電磁波（マイクロ波）や光
- 制御系（力学系）の固有振動

固有値方程式型微分方程式

$$Lu = \lambda u$$

$$u = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots = \sum_n c_n\varphi_n$$

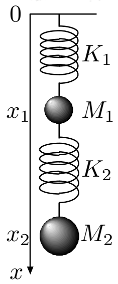
$$\sum_n c_n L\varphi_n = \lambda \sum_n c_n\varphi_n \qquad (\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle = \delta_{m,n})$$

$$\sum_n \langle\varphi_m|L|\varphi_n\rangle c_n = \lambda c_m$$

行列の固有値方程式

$$\begin{pmatrix} \langle\varphi_0|L|\varphi_0\rangle & \langle\varphi_0|L|\varphi_1\rangle & \cdots \\ \langle\varphi_1|L|\varphi_0\rangle & \langle\varphi_1|L|\varphi_1\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

例題



$$\begin{cases} -K_1x_1 + (x_2 - x_1)K_2 = M_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2} \\ -(x_2 - x_1)K_2 = M_2\dfrac{d^2x_2}{dt^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin\omega t \\ x_2 = A_2 \sin\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -K_1x_1 + (x_2 - x_1)K_2 = -M_1\omega^2 x_1 \\ -(x_2 - x_1)K_2 = -M_2\omega^2 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -(K_1 + K_2) & K_2 \\ K_2 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

例題

$$\begin{bmatrix} -(K_1 + K_2) & K_2 \\ K_2 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$M_1 = M_2 = m$ のとき

$$\begin{bmatrix} -(K_1 + K_2) & K_2 \\ K_2 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -m\omega^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -(K_1 + K_2) & K_2 \\ K_2 & -K_2 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -m\omega^2$ とおけば

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

例題

$$\begin{bmatrix} -(K_1 + K_2) & K_2 \\ K_2 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

一般に $A\vec{x} = \lambda S\vec{x}$ のとき

$$S = C^2 \qquad \left(C = S^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$A\vec{x} = \lambda C^2\vec{x}$$

$$C^{-1}A\vec{x} = C^{-1}\lambda C^2\vec{x}$$

$$C^{-1}AC^{-1}C\vec{x} = \lambda C\vec{x}$$

$\vec{y} \equiv C\vec{x}$　$B \equiv C^{-1}AC^{-1}$ とおけば $B\vec{y} = \lambda\vec{y}$

相似変換

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ のとき

$$U^{-1}A\vec{x} = U^{-1}\lambda\vec{x}$$
$$U^{-1}AUU^{-1}\vec{x} = \lambda U^{-1}\vec{x}$$

$B \equiv U^{-1}AU$

$\vec{y} \equiv U^{-1}\vec{x}$ とおくと

$$B\vec{y} = \lambda\vec{y}$$

A と $U^{-1}AU$ は同じ固有値をもつ

相似変換

$A\vec{u}_k = \lambda_k\vec{u}_k$ のとき $U = (\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots)$ とおくと

$$\begin{aligned} AU &= (\lambda_0\vec{u}_0, \lambda_1\vec{u}_1, \lambda_2\vec{u}_2, \cdots) \\ &= U\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

行列の対角化

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

を満たす U をみつけて $\{\lambda_k\}$ を求める

$U = (\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots)$ より

$A\vec{u}_k = \lambda_k\vec{u}_k$ を満たす $\{\vec{u}_k\}$ が求まる

Jacobi法

A が対称行列であるとき

U は直交行列にとることができる

直交行列の逆行列はその転置行列である $(U^{-1} = {}^tU)$

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = {}^tUAU = D$$

Jacobi法

R_kを A の、ある非対角成分を零にする直交変換とする

$A_1 = {}^tR_1AR_1$ (1つの非対角成分が0になる)

$A_2 = {}^tR_2({}^tR_1AR_1)R_2$ (別の非対角成分が0になる)

$\vdots$

$$A_n = {}^tR_n({}^tR_{n-1}\cdots{}^tR_3({}^tR_2({}^tR_1AR_1)R_2)R_3\cdots R_{n-1})R_n$$

$$\begin{aligned} A_n &= ({}^tR_n{}^tR_{n-1}\cdots{}^tR_3{}^tR_2{}^tR_1)A(R_1R_2R_3\cdots R_{n-1}R_n) \\ &= {}^t(R_1R_2R_3\cdots R_{n-1}R_n)A(R_1R_2R_3\cdots R_{n-1}R_n) \end{aligned}$$

$A_n \longrightarrow D \ (n \to \infty)$

$R_1R_2R_3\cdots R_{n-1}R_n \longrightarrow U \ (n \to \infty)$

(p,q)成分を零にする直交変換行列

$$R_{p,q} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \cos\theta & 0 & \ddots & 0 & \sin\theta & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & -\sin\theta & 0 & \ddots & 0 & \cos\theta & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ p\text{行} \\ \\ \\ \\ q\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccc} & & p\text{列} & & & & q\text{列} & & \end{array} & \end{array}$$

Jacobi法

$B = {}^tR_{p,q}AR_{p,q}$

$B(p,p) = A(p,p)\cos^2\theta - 2A(p,q)\cos\theta\sin\theta + A(q,q)\sin^2\theta$

$B(p,q) = (A(p,p) - A(q,q))\cos\theta\sin\theta + A(p,q)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$B(q,p) = B(p,q)$

$B(q,q) = A(p,p)\sin^2\theta + 2A(p,q)\cos\theta\sin\theta + A(q,q)\cos^2\theta$

$B(p,j) = A(p,j)\cos\theta - A(q,j)\sin\theta \ (j \neq p,q)$

$B(q,j) = A(p,j)\sin\theta + A(q,j)\cos\theta \ (j \neq p,q)$

$B(i,p) = A(i,p)\cos\theta - A(i,q)\sin\theta \ (i \neq p,q)$

$B(i,q) = A(i,p)\sin\theta + A(i,q)\cos\theta \ (i \neq p,q)$

Jacobi法

$$B(p,q) = \frac{1}{2}(A(p,p) - A(q,q))\sin 2\theta + A(p,q)\cos 2\theta = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\theta = \sqrt{\dfrac{1-\gamma}{2}}\mathrm{sign}(\alpha\beta) \\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = -A(p,q) \\ \beta = \dfrac{1}{2}(A(p,p) - A(q,q)) \\ \gamma = \dfrac{|\beta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \end{array}\right.$$

A_k の（絶対値の）最大非対角成分 $A(p,q)$ を零にする直交変換行列 R_k に対して

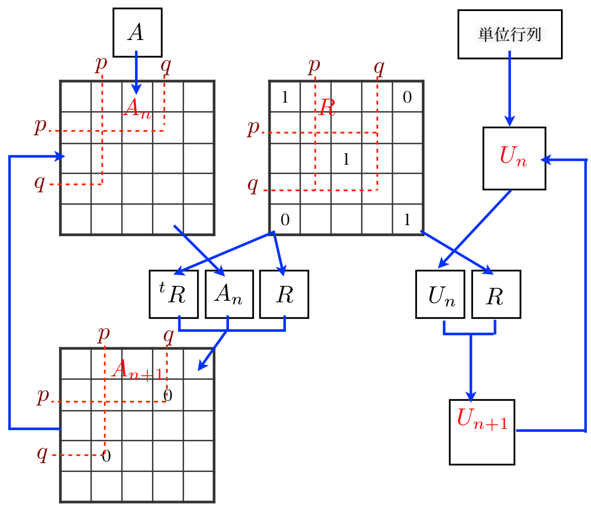
$$A_{k+1} = {}^tR_kA_kR_k$$

Jacobi法

$$U_k = U_{k-1}R_k \qquad U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_k(i,p) = U_{k-1}(i,p)\cos\theta - U_{k-1}(i,q)\sin\theta \quad (i = 0,1,2,3,\cdots)$$

$$U_k(i,q) = U_{k-1}(i,q)\cos\theta + U_{k-1}(i,p)\sin\theta \quad (i = 0,1,2,3,\cdots)$$



冪乗法

$$A = U\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}U^{-1}$$

$$A^2 = U\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}U^{-1}U\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}U^{-1} = U\begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}U^{-1}$$

$$A^3 = U\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}U^{-1}U\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}U^{-1}U\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}U^{-1} = U\begin{pmatrix} \lambda_0^3 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}U^{-1}$$

$$A^n = U\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}U^{-1}\cdots U\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}U^{-1} = U\begin{pmatrix} \lambda_0^n & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}U^{-1}$$

冪乗法

$$A^nU = U\begin{pmatrix} \lambda_0^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{N-1}^n \end{pmatrix} = \lambda_0^nU\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_1/\lambda_0)^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\lambda_{N-1}/\lambda_0)^n \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_0| > |\lambda_1| > \cdots > |\lambda_{N-1}| \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right| = 0 \quad (k \neq 0)$$

$$A^nU = U\begin{pmatrix} \lambda_0^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{N-1}^n \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} = U\begin{pmatrix} \lambda_0^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

冪乗法

$$\vec{x}^{(0)} = c_0\vec{u}_0 + c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots$$
$$A\vec{x}^{(0)} = c_0A\vec{u}_0 + c_1A\vec{u}_1 + c_2A\vec{u}_2 + \cdots$$
$$= c_0\lambda_0\vec{u}_0 + c_1\lambda_1\vec{u}_1 + c_2\lambda_2\vec{u}_2 + \cdots$$
$$A^2\vec{x}^{(0)} = c_0\lambda_0^2\vec{u}_0 + c_1\lambda_1^2\vec{u}_1 + c_2\lambda_2^2\vec{u}_2 + \cdots$$
$$\vdots$$
$$A^n\vec{x}^{(0)} = c_0\lambda_0^n\vec{u}_0 + c_1\lambda_1^n\vec{u}_1 + c_2\lambda_2^n\vec{u}_2 + \cdots$$
$$= \lambda_0^n\left(c_0\vec{u}_0 + c_1\left(\lambda_1/\lambda_0\right)^n\vec{u}_1 + \cdots\right.$$
$$\rightarrow \quad \lambda_0^n c_0\vec{u}_0 \quad (n\rightarrow\infty)$$

$$\begin{pmatrix} \|\vec{u}_0\| = 1 \\ \|\vec{u}_1\| = 1 \\ \|\vec{u}_2\| = 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

冪乗法

$$A^n\vec{x}^{(0)} \rightarrow \quad \lambda_0^n c_0\vec{u}_0 \quad (n\rightarrow\infty)$$

$$\vec{x}^{(n+1)} = \frac{1}{\left\|A\vec{x}^{(n)}\right\|}A\vec{x}^{(n)} \quad \left(\left\|\vec{x}^{(n+1)}\right\| = \frac{1}{\left\|A\vec{x}^{(n)}\right\|}\left\|A\vec{x}^{(n)}\right\| = 1\right)$$

$$\vec{x}^{(n)} \propto A^n\vec{x}^{(0)} \rightarrow \quad \lambda_0^n c_0\vec{u}_0 \quad (n\rightarrow\infty)$$

$$\vec{x}^{(n)} \rightarrow \quad \vec{u}_0 \quad (n\rightarrow\infty)$$

冪乗法

$$\vec{x}^{(n+1)} = \frac{1}{\left\|A\vec{x}^{(n)}\right\|}A\vec{x}^{(n)}$$

$$\vec{x}^{(n)} \rightarrow \quad \vec{u}_0 \quad (n\rightarrow\infty)$$

$$\left\|A\vec{x}^{(n)}\right\| \rightarrow \left\|A\vec{u}_0\right\| = \left\|\lambda_0\vec{u}_0\right\| = \lambda_0\left\|\vec{u}_0\right\| = \lambda_0$$

$$\left\|A\vec{x}^{(n)}\right\| \rightarrow \quad \lambda_0 \quad (n\rightarrow\infty)$$

冪乗法

$$\vec{x}^{(0)} = c_0\vec{u}_0 + c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots$$

$$\vec{x}^{(0)}\cdot\vec{u}_0 = c_0\vec{u}_0\cdot\vec{u}_0 + c_1\vec{u}_1\cdot\vec{u}_0 + c_2\vec{u}_2\cdot\vec{u}_0 + \cdots = c_0$$

$$\vec{x}^{(0)} - \left(\vec{x}^{(0)}\cdot\vec{u}_0\right)\vec{u}_0 = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots \equiv \vec{x}_1^{(0)}$$

Gram-Schmidtの直交化法

$$A\vec{x}_1^{(0)} = c_1A\vec{u}_1 + c_2A\vec{u}_2 + \cdots$$
$$= c_1\lambda_1\vec{u}_1 + c_2\lambda_2\vec{u}_2 + \cdots$$

$$A^n\vec{x}_1^{(0)} \rightarrow c_1\lambda_1^n\vec{u}_1 \quad (n\rightarrow\infty)$$

冪乗法

$\vec{x}_0^{(0)} =$ 乱数など

$$k = 0,1,2,\cdots$$

$$\vec{x}_k^{(n+1)} = \frac{1}{\left\|A\vec{x}_k^{(n)}\right\|}A\vec{x}_k^{(n)}$$

$$\left\|A\vec{x}_k^{(n)}\right\| \rightarrow \lambda_k$$

$$\vec{x}_k^{(n)} \rightarrow \vec{u}_k$$

$$\vec{x}_{k+1}^{(0)} = \vec{x}_k^{(0)} - \left(\vec{x}_k^{(0)}\cdot\vec{u}_k\right)\vec{u}_k$$

行列の対角化法

- ヤコビ法
  - 実対称行列
    - 電気電子工学のほとんどの問題が対応
  - 全ての固有値・固有ベクトル
- 冪乗法
  - 最大固有値のみ
  - グラム・シュミットの直交化法
    - 必要な個数の固有値・固有ベクトル
    - 量子力学、統計力学の問題が対応